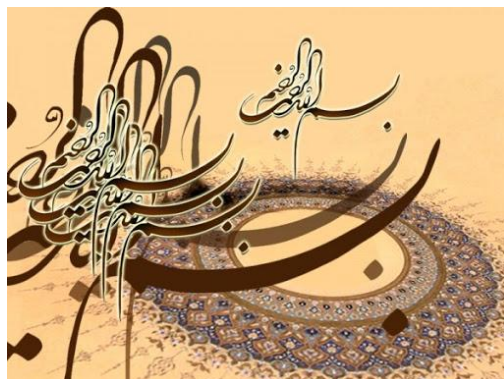




آمار و احتمالات مهندسی

تعداد واحد: ۲

نوع واحد: نظری

پیشنیاز: ریاضی عمومی ۱

سرفصل درس: (۳۲ ساعت)

- ۱- اشاره ای به تئوری مجموعه ها ، نمونه ها و نمایش جدولی آنها همراه با میانگین ، نما ، میانه و واریانس
- ۲- تبدیل و ترکیب احتمالات و قضایای مربوطه
- ۳- متغیر های تصادفی
- ۴- واسطه و میانگین و واریانس توزیعات ، توزیعات دو جمله ای پواسن ، فوق هندسی ، توزیع نرمال ، توزیع چند متغیر تصادفی
- ۵- نمونه گیری تصادفی و اعداد تصادفی
- ۶- نمونه گیری از جامعه کوچک
- ۷- برآورد پارامترهای آماری
- ۸- فواصل اطمینان، آزمون ۲، آزمون فرضی تصمیم گیری، تجزیه واریانس، رگرسیون، همبستگی، آزمون روشهای غیرپارامتری، برازش خط بر داده ها

محمد هادی وحیدی- علی عمیدی

ابوالقاسم بزرگ نیا- مجید اسدی

جان فروند

شلدون راس

هادی رنجبران

آمار ریاضی و کاربردهای آن

آمار و احتمال

آمار و کاربرد آن در مدیریت و حسابداری

فصل ۲ آنالیز ترکیبی و احتمال

۲-۱ آنالیز ترکیبی

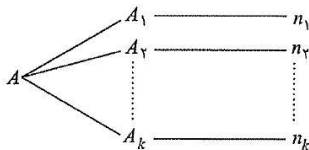
مقصود از «آنالیز ترکیبی»، دسته‌بندی اشیاء یا اعداد یا حروف و یا انسان‌ها به گروه‌های چندتایی است که بر طبق قراردادهای خاصی از لحاظ جنس و نوع یا قرار گرفتن اشیاء نزد یک‌دیگر تفاوت داشته باشند. آنالیز ترکیبی شامل ۳ بخش است: «جایگشت»، «ترتیب» و «ترکیب». قبل از پرداختن به این سه بخش، به چهار اصل بنیادی، یعنی «اصل ضرب»، «اصل جمع»، «اصل متمم» و «اصل تناظر یک‌به‌یک» می‌پردازیم.

به عنوان مثال اگر حروف a و b و c در اختیار باشند، پاسخ به پرسشهایی از این دست به مبحث آنالیز ترکیبی بر می‌گردد:

- با این سه حرف چند کلمه دو حرفی می‌توان ساخت که در آن تکرار حروف مجاز باشد؟
- با این سه حرف چند کلمه دو حرفی می‌توان ساخت که در آن تکرار حروف مجاز نباشد؟
- با این سه حرف چند کلمه دو حرفی می‌توان ساخت که در آن تکرار حروف مجاز نبوده همچنین ترتیب حروف هم اهمیت نداشته باشد؟

۲-۲ اصل ضرب

اگر عمل A (عمل اصلی و هدف مسأله) وابسته به انجام همه‌ی اعمال $A_1, A_2, \dots, A_k$ باشد به‌طوری‌که انجام عمل A_1 به n_1 طریق و انجام عمل A_2 به n_2 طریق و... و انجام عمل A_k به n_k طریق امکان‌پذیر باشد:



آنگاه انجام عمل A به $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$ طریق امکان‌پذیر است.

نکته ۱ در اصل ضرب، تمام A_i ها باید انجام گیرد. حرف ربط «و» در بیان مضمون اصل ضرب نقش تعیین‌کننده‌ای دارد.

مدیریت

مثال ۸ فرض کنید که یک قفسه‌ی کتاب دارای ۴ کتاب حسابداری، ۳ کتاب حسابداری، و ۲ کتاب اقتصاد باشد. تعداد راه‌هایی که یک شاگرد می‌تواند یکی از هر نوع کتاب‌ها را انتخاب کند، چقدر است؟

حل. (هدف) کتاب A : انتخاب یکی از هر نوع کتاب‌ها
 کتاب A_1 : انتخاب کتاب حسابداری $n_1 = 4$
 کتاب A_2 : انتخاب کتاب مدیریت $n_2 = 3$
 کتاب A_3 : انتخاب کتاب اقتصاد $n_3 = 2$

هر یک از کارهای A_1 , A_2 , و A_3 به تنهایی هدف مسأله را برآورد نمی‌کنند؛ اما اگر این سه کار را پشت سرهم انجام دهید، نتیجه چنین خواهد شد. اصل ضرب به کار می‌رود:

$$4 \times 3 \times 2 = 24$$

مثال ۲ اگر رستورانی ۴ نوع سالاد، ۸ نوع غذا و ۵ نوع نوشابه داشته باشد. چند طریق مختلف برای انتخاب سالاد، غذا و نوشابه وجود دارد؟

حل. عمل اصلی، انتخاب یک سالاد و یک غذا و یک نوشابه است. بنا بر اصل ضرب:

$$4 \times 8 \times 5 = 160$$

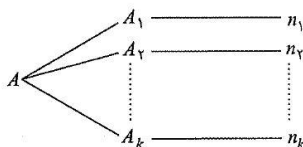
مثال ۳ فرض کنید یک کلمه‌ی عبور از ۳ نشانه تشکیل شده است. نشانه‌ی اول حرفی از الفبای فارسی بوده و دو نشانه‌ی دوم رقم باشد، تعداد کلمات عبور را بیابید.

حل. برای انتخاب نشانه‌ی اول ۳۲ راه و برای انتخاب هر یک از دو نشانه‌ی آخر ۱۰ راه وجود دارد. بنا بر اصل ضرب:

$$32 \times 10 \times 10 = 3200$$

☆ ۲-۳ اصل جمع

اگر عمل A (عمل اصلی و هدف مسأله) وابسته به انجام یکی از اعمال $A_1, A_2, \dots, A_k$ باشد، به طوری که انجام عمل A_1 به n_1 طریق و انجام عمل A_2 به n_2 طریق و ... و انجام عمل A_k به n_k طریق امکان‌پذیر باشد:



آن‌گاه انجام عمل A به $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ طریق امکان‌پذیر است.

نکته ۲ در اصل جمع، A_i ها باهم هم‌زمان اتفاق نمی‌افتند. حرف ربط «یا» در بیان مضمون اصل جمع، نقش تعیین‌کننده‌ای دارد.

مثال ۴ یک کلاس هنری شامل ۵ شاگرد پسر و ۳ شاگرد دختر است. تعداد راه‌هایی که می‌توان یک نماینده برای کلاس انتخاب کرد، بیابید.

حل. (هدف) کلاس A : انتخاب یک نماینده برای کلاس

کلاس A_1 : انتخاب دختر ۳

کلاس A_2 : انتخاب پسر ۵

هر کدام از کارهای A_1 و A_2 به تنهایی هدف مسأله را برآورده می‌کند، اصل جمع به کار می‌رود:

$$3 + 5 = 8$$

مثال ۵: برای رفتن از شهر x به شهر y ، ۳ راه زمینی، ۱ راه دریایی و ۲ راه هوایی وجود دارد. به چند طریق می‌توان از شهر x به شهر y رفت؟
 حل. عمل اصلی رفتن از x به y ، یعنی راه زمینی یا راه دریایی یا راه هوایی است. پس، از اصل جمع استفاده می‌کنیم:

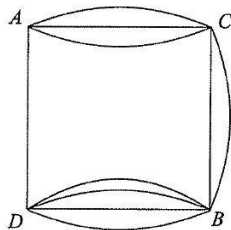
$$۳ + ۱ + ۲ = ۶$$

نکته ۳: در بسیاری از مسایل اصل ضرب و اصل جمع باهم مورد استفاده قرار می‌گیرد.

مثال ۶: می‌خواهیم از بین ۵ پزشک و ۱۰ پرستار و ۴ کارمند یک گروه ۲ نفری تشکیل دهیم. چند گروه می‌توان ساخت، اگر افراد هر گروه از رده‌های مختلف باشند؟
 حل.

$$\begin{aligned} & (\text{پرستار و کارمند}) (\text{پزشک و کارمند}) (\text{پزشک و پرستار}) = \text{گروه ۲ نفری} \\ & = (۵ \times ۱۰) + (۵ \times ۴) + (۴ \times ۱۰) = ۱۱۰ \end{aligned}$$

مثال ۷: در شکل زیر به چند طریق می‌توان از A به B رفت؟



حل.

$$\text{I: } A \rightarrow C \rightarrow B = ۳ \times ۲ = ۶ \quad (\text{طبق اصل ضرب})$$

$$\text{II: } A \rightarrow D \rightarrow B = ۱ \times ۴ = ۴ \quad (\text{طبق اصل ضرب})$$

$$\text{طبق اصل جمع داریم } ۶ + ۴ = ۱۰.$$

$$n! = \frac{(n+1)!}{(n+1)}$$

فرمول جدید محاسبه فاکتوریل

اثبات اینکه صفر فاکتوریل

برابر با یک می شود.

خب حالا بپایید فاکتوریل چند عدد را با فرمول جدید محاسبه کنیم:

$$3! = \frac{4!}{4} = \frac{24}{4}$$

$$2! = \frac{3!}{3} = \frac{6}{3}$$

$$1! = \frac{2!}{2} = \frac{2}{2}$$

فاکتوریل اعداد 1 تا 3 در فرمول جدید

و اکنون فاکتوریل 0:

$$0! = \frac{1!}{1} = 1$$

$$0! = 1, 1! = 1$$

مثال ۱۰

$$2! = 2 \times 1 = 2$$

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

معادله $(x-1)! = 1$ را حل کنید.

مثال ۱۱

حل.

$$(x-1)! = 1; \begin{cases} (x-1)! = 1!; & x-1 = 1; & x = 2 \\ (x-1)! = 0!; & x-1 = 0; & x = 1 \end{cases}$$

نکته ۴ فاکتوریل هر عدد را می‌توان به صورت حاصل ضرب همان عدد در فاکتوریل عدد متوالی کم‌تر از آن عدد نوشت. برای مثال:

$$n! = n(n-1)! \quad \text{یا} \quad n! = n(n-1)(n-2)!$$

مثال ۸۲ کسرهای زیر را ساده کنید.

$$۱) \frac{۶!}{۴!} \qquad ۲) \frac{۵!۲!}{۳!} \qquad ۳) \frac{(n+1)!}{(n-1)!}$$

حل.

$$\frac{۶!}{۴!} = \frac{۶ \times ۵ \times ۴!}{۴!} = ۶ \times ۵ = ۳۰ \qquad (۱)$$

$$\frac{۵!۲!}{۳!} = \frac{۵ \times ۴ \times ۳! \times ۲!}{۳!} = ۵ \times ۴ \times ۲ \times ۱ = ۴۰ \qquad (۲)$$

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} = (n+1)n = n^2 + n \qquad (۳)$$

مثال ۸۳ عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$$۱) ۷! - ۵ \times ۵! \qquad ۲) ۸ \times ۷! - \frac{۹!}{۲!۳!}$$

حل.

(۱)

$$\begin{aligned} ۷! - ۵ \times ۵! &= ۷ \times ۶ \times ۵! - ۵ \times ۵! = (۷ \times ۶ - ۵) \times ۵! \\ &= ۳۷ \times ۱۲۰ = ۴۴۴۰ \end{aligned}$$

(۲)

$$\begin{aligned} ۸ \times ۷! - \frac{۹!}{۲!۳!} &= ۸ \times ۷! - \frac{۹ \times ۸ \times ۷!}{۱۲} = ۸ \times ۷! - ۶ \times ۷! \\ &= (۸ - ۶) \times ۷! = ۲ \times ۷! = ۱۰۰۸۰ \end{aligned}$$

نکته ۵ فاکتوریل را نمی‌توان با هم جمع یا تفریق یا درهم ضرب و یا بر هم تقسیم کرد.



[محل n ام به 1 طریق] ... [محل دوم به $n - 1$ طریق] [محل اول به n طریق]

۲-۷ جایگشت خطی



مقصود از جایگشت n شیء متمایز $a_1, a_2, \dots, a_n$ که آن را با P_n نشان می‌دهند، تشکیل گروه‌هایی با تمام آن n شیء است، به قسمی که اختلاف گروه‌ها فقط در ترتیب قرار گرفتن آن n شیء نزد هم باشد. طبق قرارداد هر یک از گروه‌ها را یک «جایگشت (تبدیل)» این n شیء می‌نامند. تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$P_n = n!$$

مثال ۱۲ ۲ سرباز و ۳ درجه‌دار به چند طریق می‌توانند در یک صف بایستند؟

حل.

$$n = 2 + 3 = 5, \quad P_5 = 5! = 120$$

مثال ۱۵ با حروف کلمه‌ی «تبدیل» چند کلمه‌ی ۵ حرفی می‌توان ساخت که در آن حرف «ت» قبل از «ل» آمده باشد (نه به الزام بلافاصله)؟

حل.

(۱)

(۲)

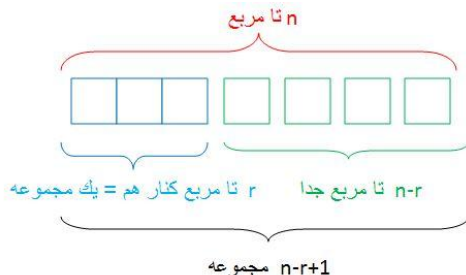
تعداد کلماتی که در آن‌ها = تعداد کلماتی که در آن‌ها = کل کلمات
«ل» قبل از «ت» آمده + «ت» قبل از «ل» آمده

بدیهی است این دو حالت در نظر گرفته شده، تمامی کلمات ۵ حرفی ممکن را شامل می‌شوند، زیرا در هر کلمه یا «ل» قبل از «ت» است و یا «ت» قبل از «ل». از طرفی $(2) = (1)$ ، این برابری با استفاده از اصل تناظر یک‌به‌یک حاصل شده است؛ زیرا در هر کلمه که در آن «ت» قبل از «ل» آمده با جابه‌جا کردن این دو حرف به کلمه‌ای می‌رسیم که در آن «ل» قبل از «ت» آمده است. بنابراین:

$$\frac{\text{کل کلمات}}{2} = \frac{5!}{2} = 60$$

نکته ۶ اگر n شیء متمایز داشته باشیم و بخواهیم r شیء معین از n شیء کنار هم باشند، تعداد راه‌های مختلفی که این کار امکان‌پذیر است، از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$r!(n - r + 1)!$$



بنابراین تعداد کل جایگشتها حاصلضرب تعداد جایگشتهای مجموعه ها در تعداد جایگشتهای عناصر کنار هم می باشد.

مثال ۱۶ به چند طریق ۴ دانش آموز که ۲ نفر آنها برادر هستند، می توانند کنار هم روی یک ردیف نیمکت بنشینند، به طوری که دو برادر همواره کنار هم باشند؟
حل.

$$n = 4, r = 2: 2! \times (4 - 2 + 1)! = 2! \times 3! = 12$$

نکته ۷ اگر n شی متمایز داشته باشیم و بخواهیم r شی معین از n شی کنار هم نباشند، تعداد راه های مختلفی که این کار امکان پذیر است، از فرمول زیر به دست می آید:

$$n! - r!(n - r + 1)!$$

مثال ۱۷ با حروف a, b, c, d, e چند کلمه ی ۵ حرفی می توان ساخت، به طوری که دو حرف a و b کنار هم نباشند؟
حل.

$$n = 5, r = 2: 5! - 2!(5 - 2 + 1)! = 5! - 2!4! = 4!(5 - 2) = 72$$

مثال ۱۸ افراد a, b, c, d, e, f به چند طریق می توانند در یک صف بایستند که a و b کنار هم باشند و e و f کنار هم نباشند؟

حل. ابتدا حالت هایی که a و b در کنار هم هستند، پیدا می کنیم:

$$a, b, c, d, e, f; 2! \times 5! = 240$$

چون در بعضی از این حالت‌ها f و e کنار هم هستند، پس حالت‌هایی را نیز پیدا می‌کنیم که در عین حال که a و b کنار هم هستند e و f هم کنار هم باشند:

$$\boxed{a, b}, \boxed{e, f}, c, d; 2! \times 2! \times 3! = 96$$

از کل حالت‌هایی که a و b در کنار هم هستند، آن حالت‌هایی که e و f هم کنار یک‌دیگر واقع شده‌اند، کنار می‌گذاریم:

$$240 - 96 = 144$$

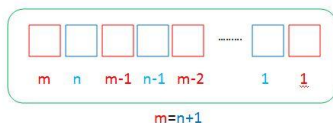
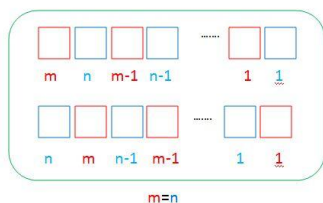
نکته ۸ چیدن یک در میان عنصرها کنار هم:

الف) اگر $m = n$ ، در این صورت تعداد راه‌های مختلفی که می‌توان m شیء و n شیء را یک در میان چید، از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$2 \times m! \times n!$$

ب) اگر $m = n + 1$ ، در این صورت تعداد راه‌های مختلفی که می‌توان m شیء و n شیء را یک در میان چید، از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$m! \times n!$$



مثال ۱۹ ۳ کتاب حسابداری مشابه و ۳ کتاب اقتصاد متفاوت داریم، به چند طریق می‌توان این کتاب‌ها را به صورت یک در میان در یک طبقه‌ی کتابخانه قرار داد؟
حل.

$$m = 3, n = 3: 2 \times 3! \times 3! = 72$$

تعمیم نکته ۶

نکته ۹ اگر بخواهیم n دسته عنصر متمایز که شامل n_1 عنصر مختلف از دسته اول و n_2 عنصر مختلف از دسته دوم و ... و n_k عنصر مختلف از دسته k ام کنار هم قرار گیرند، تعداد راه‌های مختلفی که این کار امکان‌پذیر است، از فرمول زیر به دست می‌آید.

$$n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k! \times k!$$

مثال ۲۱ ۳ مداد، ۴ خودکار و ۶ خودنویس، به چند طریق می‌توانند کنار هم قرار گیرند، به طوری که همواره مدادها، خودکارها و خودنویس‌ها کنار هم باشند؟
حل.

$$n_1 = 3, n_2 = 4, n_3 = 6, k = 3: 3! \times 4! \times 6! \times 3! = 622080$$

نکته ۱۰ می‌خواهیم جایگشت‌های n شی را که همگی در هر گروه شرکت دارند و لی این n شی همگی باهم متمایز نیستند، بررسی کنیم. تعداد جایگشت‌های n شی که n_1 تای آن‌ها از نوع اول، n_2 تای آن‌ها از نوع دوم،

... و n_k تای آن‌ها از نوع k ام است، $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ ، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$

مثال ۲۲ با حروف کلمه‌ی «زلزله» چند کلمه‌ی پنج حرفی می‌توان نوشت؟
حل. حرف «ز» دو بار، حرف «ل» دو بار و حرف «ه» یک بار تکرار شده است. پس:

$$\frac{5!}{2!2!1!} = 30$$

مثال ۲۳ به چند طریق می‌توان ۴ درخت گلابی، ۲ درخت گیلاس و ۵ درخت سیب را در یک ردیف نشانند؟
حل. ۱۱ درخت داریم که ۴ تای آن‌ها گلابی و ۲ تای آن‌ها گیلاس و ۵ تای آن‌ها سیب است؛ پس:

$$\frac{11!}{4!2!5!} = 6930$$

مثال ۲۴ تعیین کنید چند جایگشت می‌توان با حروف‌های کلمه‌ی «statistics» ساخت به طوری که دو حرف «i» کنار هم باشند.

حل. اگر دو حرف «ه» کنار هم قرار گیرند، به منزله‌ی یک حرف محسوب شده و حرف «s» ۳ بار و حرف «t» ۳ بار تکرار شده است؛ پس:

$$\frac{9!}{3!3!} = 10080$$

مثال ۲۵ با ارقام ۱، ۲، ۲، ۲، ۳ و ۳ چند عدد پنج رقمی می‌توان ساخت؟
حل. ارقام عدد موردنظر، به صورت یکی از دسته‌های زیر است:

$$\text{I) } 1, 2, 2, 2, 3: \frac{5!}{3!} = 20 \quad \text{II) } 1, 2, 2, 3, 3: \frac{5!}{2!2!} = 30 \quad \text{III) } 2, 2, 2, 3, 3: \frac{5!}{3!2!} = 10$$

بنابراین، تعداد اعداد ۵ رقمی چنین است: $20 + 30 + 10 = 60$.

روش تعیین تعداد جایگشتهایی که در آنها برخی از مکانهای اشیاء دارای شرایط خاصی هستند:

ابتدا n خانه به‌طور افقی رسم می‌کنیم و آن‌گاه خانه‌های استثنایی جدول را مشخص می‌کنیم (به خانه‌هایی که بعضی از اشیاء حق قرار گرفتن در آن خانه را ندارند و یا بعضی از اشیاء باید در آن خانه قرار گیرند، خانه استثنایی گویند). پس از این عمل تعداد اشیایی که می‌توانند در خانه‌ی استثنایی قرار گیرند در داخل خانه می‌نویسیم و دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

الف) اگر تکرار اشیاء مجاز باشد، با پُر شدن هر خانه از تعداد اشیاء کم نمی‌شود.
ب) اگر تکرار اشیاء مجاز نباشد، هر خانه‌ای که پُر شود یکی از اشیاء کم می‌شود.

مثال ۲۹ با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ چند عدد شش رقمی زوج بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟
حل.

$$\boxed{5} \boxed{4} \boxed{3} \boxed{2} \boxed{1} \boxed{3}^* = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 = 360$$

خانه‌ی * استثنایی است، زیرا تنها ارقام ۲، ۴، ۶ می‌توانند در آن قرار گیرند.

مثال ۳۰ با ارقام ۱، ۳، ۵ و ۵ چند عدد چهار رقمی با تکرار ارقام می‌توان نوشت؟
حل.

$$\boxed{3}^* \boxed{4} \boxed{4} \boxed{4} = 3 \times 4 \times 4 \times 4 = 192$$

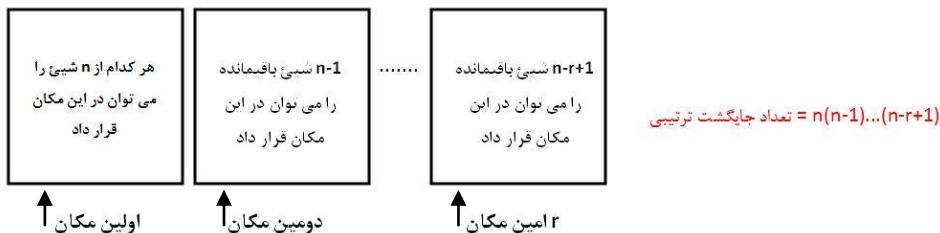
خانه * استثنایی است، زیرا عدد صفر حق قرار گرفتن در این خانه را ندارد و چون تکرار ارقام مجاز است با پُر شدن هر خانه از تعداد ارقام، کم نمی‌شود.

۱۰-۲ ترتیب



تعداد جایگشت‌های r شیء از n شیء متمایز را «ترتیب r از n » می‌نامند و از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$P_n^r = P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}, \quad n \geq r$$



مثال ۳۱ حاصل عبارتهای زیر را بیابید.

۱) P_5^5 ۲) P_n^{n-1}

حل.
(۱)

$$P_5^5 = \frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1!} = 20$$

(۲)

$$P_n^{n-1} = \frac{n!}{(n-n+1)!} = \frac{n!}{1!} = n!$$

مثال ۳۲ اگر $P_n^2 + 8 = P_n^3$ ، n را بیابید.

حل.

$$\begin{aligned} 2P_n^2 + 8 &= P_n^3; \quad 2 \times \frac{n!}{(n-2)!} + 8 = \frac{(2n)!}{(2n-2)!}; \\ 2n(n-1) + 8 &= 2n(2n-1); \quad 2n^2 - 2n + 8 = 4n^2 - 2n; \\ 2n^2 &= 8; \quad n^2 = 4; \quad n = 2 \end{aligned}$$

نکته ۱۱ منظور از ترتیب r تایی از n شی تشکیل گروههایی است که هر یک شامل r شی متمایز از این n شی باشد و اختلاف هر گروه با گروه دیگر هم از لحاظ قرار گرفتن اشیاء و هم در نوع آنها باشد، هر یک از این گروهها را یک ترتیب r تایی از n شی می نامیم.

نکته ۱۲ تفاوت ترتیب با جایگشت در آن است که در هر حالت همه ی اشیاء شرکت ندارند

مثال ۳۳ به چند طریق می‌توان از بین ۵ نفر از کارمندان یک اداره به ترتیب یک نفر به عنوان رئیس و یک نفر به عنوان معاون انتخاب کرد؟ (هر نفر فقط می‌تواند یک پست داشته باشد).
 حل. می‌خواهیم از بین ۵ نفر، ۲ نفر را انتخاب کنیم، طوری که عنوان سمت آن‌ها مهم است:

$$P_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 20$$

راه حل دوم: دو مکان خالی را در نظر بگیرید. در هر حالت تعداد طریقی که می‌توان هر خانه را پر کرد، می‌نویسیم. برای پر کردن خانه‌ی اول ۵ طریق و برای خانه‌ی دوم ۴ طریق وجود دارد. پس، بنا بر اصل ضرب:

$$5 \times 4 = 20$$

مثال ۳۴ اتوبوسی با ۵ مسافر شروع به حرکت می‌کند و در ۱۰ ایستگاه توقف می‌کند. به چند طریق امکان دارد هیچ دو مسافری در یک ایستگاه پیاده نشوند؟
 حل.

$$P_{10}^5 = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 30240$$

راه حل دوم: پنج مکان خالی را در نظر بگیرید. در هر حالت تعداد طریقی که می‌توان هر خانه را پر کرد، می‌نویسیم. برای نفر اول ۱۰ امکان، برای نفر دوم ۹ امکان وجود دارد؛ زیرا در ایستگاهی که نفر اول پیاده می‌شود نفر دوم نمی‌تواند پیاده شود و برای نفر سوم ۸ امکان و برای نفر چهارم ۷ امکان و برای نفر پنجم ۶ امکان وجود دارد. بنابر اصل ضرب:

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30240$$

مثال ۳۵ به چند طریق می‌توان ۷ کتاب ریاضی و ۳ کتاب آمار را در یک قفسه چید به طوری که هیچ دو کتاب آماری کنار هم نباشد؟

حل. ابتدا کتاب‌های ریاضی را می‌چینیم (اشیایی که شرطی برایشان نداریم) که این کار به ۷! حالت ممکن است. بعد از آن بین کتاب‌های ریاضی مطابق شکل، ۸ جا می‌توان در نظر گرفت که ۳ تا از آن‌ها را باید انتخاب کرد و کتاب‌های آمار را در آن ۳ جا قرار داد:

$$\square M_1 \square M_7 \square M_2 \square M_4 \square M_5 \square M_6 \square M_3 \square$$

با توجه به این که ترتیب قرار گرفتن کتاب‌ها مهم است، پس این کار به P_8^3 طریق، میسر است و در نتیجه:

$$7! \times P_8^3 = 7! \times \frac{8!}{5!} = 7! \times 8 \times 7 \times 6 = 1693440$$

مثال ۳۶ در چند جایگشت از رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ به‌طور دقیق ۳ رقم وجود دارد؟
 حل. ابتدا یک بسته ۵ رقمی درست می‌کنیم که در دو انتهای آن ۴ و ۵ قرار داشته باشند. به ۲ طریق می‌توانیم رقم‌های ۴ و ۵ را در دو انتهای این بسته قرار دهیم و به P_2^2 طریق می‌توانیم ۳ رقم از ۷ رقم باقی‌مانده را بین رقم‌های ۴ و ۵ قرار دهیم. پس به $P_2^2 \times 2 \times 5!$ طریق می‌توانیم این بسته را تشکیل دهیم.

□ ○ ○ ○ □

این بسته به همراه ۴ رقم باقی‌مانده به ۵! طریق می‌توانند در یک ردیف قرار گیرند. پس تعداد جایگشت‌های موردنظر چنین است:

$$2 \times P_2^2 \times 5! = 2 \times \frac{2!}{1!} \times 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 240$$

مثال ۳۷ با رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ چند عدد چهار رقمی می‌توان نوشت؟ (بدون تکرار رقم‌ها)
 حل.

$$\boxed{6} \boxed{5} \boxed{4} \boxed{3} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

نکته ۱۴ تعداد ترتیب‌های r -تایی از n شیء که فاقد m شیء به‌خصوص هستند، از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$P_{n-m}^r$$

نکته ۱۴، تعداد جایگشت r شیئی از $n-m$ شیئی را محاسبه می‌کند که درست است چون m شیئی از n شیئی را کنار گذاشته ایم و می‌خواهیم r شیئی از آن مجموعه را انتخاب کنیم.

مثال ۳۸ با حروف کلمه‌ی «نیلوفر» چند کلمه‌ی سه حرفی می‌توان ساخت، به‌طوری که فاقد حروف «ن» و «ف» باشد؟
 حل.

$$n = 6, m = 2, r = 3 : P_{6-2}^3 = P_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$$

نکته ۱۵ تعداد ترتیب‌های r تایی از n شیء که در همه‌ی آن‌ها شیء به‌خصوصی به کار رفته است، از فرمول زیر به‌دست می‌آید.

$$r \times P_{n-1}^{r-1}$$

توضیح: ابتدا شیئی به‌خصوص را کنار می‌گذاریم و تعداد جایگشت $r-1$ شیئی از $n-1$ شیئی را محاسبه می‌کنیم، حال چون r مکان وجود دارد که شیئی به‌خصوص را در هر یک از جایگشت‌های محاسبه شده قرار دهیم (بین $r-1$ شیئی $r-2$ مکان وجود دارد که علاوه بر ۲ مکان قرار گرفته در دو طرف مجموعه کلاً r مکان می‌شود)، کل حالات عبارتست از حاصلضرب عدد r در تعداد جایگشت $r-1$ شیئی از $n-1$ شیئی.

مثال ۳۹ با حروف کلمه‌ی «مرسده» چند کلمه‌ی ۳ حرفی می‌توان ساخت، به‌طوری که شامل حرف «م» باشد؟ حل.

$$n = 5, r = 3 : 3 \times P_{5-1}^{3-1} = 3 \times P_4^2 = 3 \times \frac{4!}{(4-2)!} = 36$$

نکته ۱۶ (ترتیب با تکرار) هرگاه تکرار هر کدام از n شیء که یافتن ترتیب‌های r تایی آن‌ها مورد نظر است، مجاز باشد، ترتیب با تکرار پدید می‌آید. در ترتیب با تکرار هم برای یافتن تعداد ترتیب‌ها از روش پر کردن خانه‌ها استفاده می‌کنیم، لیکن چون تکرار مجاز است، هر یک از خانه‌های در نظر گرفته شده را با n شیء می‌توان پر کرد. بنابراین اصل ضرب داریم:

$$\underbrace{n \times n \times \dots \times n}_r = n^r$$

مثال ۴۰ به چند طریق می‌توان ۴ جایزه را بین ۳ نفر تقسیم کرد، به‌طوری که هر نفر مجاز باشد که در صورت استحقاق تا هر ۴ جایزه را به خود اختصاص دهد؟ حل. برای نفر اول امکان ۴ جایزه، برای نفر دوم امکان ۴ جایزه، زیرا هر نفر امکان کسب هر جایزه را دارد و برای نفر سوم امکان ۴ جایزه وجود دارد. پس

$$4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 256$$

۲-۱۱ ترکیب



تعداد انتخاب‌های r شیء متمایز از n شیء را بدون در نظر گرفتن ترتیب آن‌ها، «ترکیب r از n » می‌نامند و از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \quad n \geq r$$

مثال ۴۱ حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

$$۱) \binom{۷}{۲} \quad ۳) \binom{n}{n-۱}$$

چون تعداد جایگشت‌های حاصل از r شیء متمایز برابر با $r!$ است و تمام این $r!$ جایگشت یک انتخاب را در ترکیب تشکیل می‌دهند، بنابراین باید فرمول محاسبه تعداد جایگشت بر $r!$ تقسیم شود تا تعداد انتخاب‌های r شیء از n شیء (یعنی ترکیب r شیء از n شیء) محاسبه شود.

حل.

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{2 \times 5!} = 21 \quad (1)$$

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!(n-n+1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n \quad (2)$$

مثال ۳۲ اگر $\binom{n}{n-1} = 10$ ، n را بیابید.

حل.

$$\binom{n}{n-2} = 10; \frac{n!}{(n-2)!(n-n+2)!} = 10; \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)! \times 2!} = 10$$

$$; n(n-1) = 20; n = 5$$

نکته ۱۷ منظور از ترکیب n تایی از شیء تشکیل گروه‌هایی است که هر یک شامل r شیء بوده و اختلاف گروه‌ها فقط در شیء‌ها باشد، نه طرز قرار گرفتن آن‌ها کنار یکدیگر.

نکته ۱۸ تفاوت ترکیب‌های چندتایی با جایگشت‌های چندتایی (ترتیب‌ها یا تبدیلی‌های چندتایی) در این است که در ترکیب‌های چندتایی، ترتیب قرار گرفتن اشیاء کنار هم اهمیتی ندارد، بنابراین در مسایلی مانند انتخاب چند شیء از میان اشیاء مختلف یا مخلوط نمودن رنگ‌های مختلف به منظور ایجاد رنگ‌های جدید و یا انتخاب چند نماینده از بین چند نفر از ترکیب استفاده می‌کنیم. به بیان دیگر مشکل عمده در مسایل مربوط به جایگشت و ترکیب، تشخیص این نکته است که آیا مسأله تعداد ترکیبات را خواسته یا تعداد جایگشت‌ها را. در حل این نوع مسایل بهتر است ابتدا معین کنیم آیا تعویض در ترتیب اشیاء در نتیجه‌ی حاصل تغییری ایجاد می‌کند یا خیر. اگر این عمل باعث تغییر شود، در این صورت، در مسأله تعداد جایگشت‌ها خواسته شده است و اگر تاثیر نکند، تعداد ترکیب مورد توجه است.

مثال ۳۳ یک مجموعه‌ی ۶ عضوی چند زیر مجموعه‌ی ۳ عضوی دارد؟

حل. با تعویض اعضای یک مجموعه، مجموعه‌ی جدیدی به دست نمی‌آید، پس:

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3 \times 2 \times 1} = 20$$

مثال ۴۴ ۵ نفر به چند طریق مختلف می‌توانند یک گروه کار ۳ نفری بسازند؟
 حل. تغییر در ترتیب یک گروه کاری، موجب پیدایش گروه کاری متمایزی نمی‌شود، پس:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2 \times 1} = 10$$

مثال ۴۵ هشت نقطه روی محیط یک دایره قرار دارند. از وصل کردن هر دو نقطه به هم، چند وتر ایجاد می‌شود؟
 حل. چون ترتیب وصل کردن دو نقطه مطرح نیست و تغییر در ترتیب مزبور به پیدایش وتر جدیدی منجر نمی‌شود، پس:

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{2 \times 6!} = 28$$

مثال ۴۶ تعداد ۱۰ مکعب با ابعاد متفاوت وجود دارند. به چند طریق می‌توان ۳ تا از آن‌ها را انتخاب کرد به طوری‌که

- (۱) هیچ شرطی نداشته باشیم.
- (۲) بخواهیم مکعب اول را سفید، مکعب دوم را سبز و مکعب سوم را قرمز کنیم؟

حل.

(۱) انتخاب ۳ شیء از ۱۰ شیء متفاوت بدون هیچ شرطی چنین است:

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3 \times 2 \times 1 \times 7!} = 10 \times 3 \times 4 = 120$$

(۲) باتوجه به شرطی که در مسأله عنوان شده، ترتیب انتخاب مکعب‌ها در این حالت مهم است، بنابراین:

$$P_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 720$$

مثال ۴۷ در چند جایگشت از حروف AAABBBBCC در کنار هم نیستند؟

حل. ابتدا حروف AAACCC را می‌چینیم. این کار به $\frac{6!}{3!3!}$ روش میسر است. در بین این حروف چیده شده ۷ جا وجود دارد که حروف B باید در آن‌ها قرار گیرند. پس، باید از این ۷ جا، ۴ مکان را انتخاب کرد و حرف B را در آن‌ها قرار داد؛ این کار به C_7^4 طریق ممکن است و به این ترتیب هیچ دو حرف B کنار هم قرار نخواهند گرفت، بنابراین:

$$\frac{6!}{3!3!} \times \binom{7}{4} = 700$$

مثال ۴۸ ثابت کنید:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

حل. $\binom{n}{r}$ معادل انتخاب r شیء از بین n شیء است. پس از انجام این عمل $(n-r)$ شیء بدون استفاده باقی می ماند. بنابراین می توان گفت که به جای انتخاب r شیء برای یک منظور، $n-r$ شیء انتخاب شده و سپس کنار گذاشته شوند. آنگاه r شیء باقی مانده را برای عمل مورد نظر استفاده کرد، پس $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.

نکته ۱۹ رابطه های زیر همواره برقرار است:

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} &= 2^n \\ \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} &= 0 \end{aligned}$$

مثال ۴۹ به چند طریق می توان از یک گروه ۸ نفره یک تیم حداقل ۲ نفره انتخاب کرد؟
حل.

$$\binom{8}{2} + \binom{8}{3} + \dots + \binom{8}{8} = 2^8 - \binom{8}{0} - \binom{8}{1} = 256 - 1 - 8 = 247$$

این رابطه همان رابطه محاسبه تعداد زیر مجموعه های حاصل از n شیء است.

راجع به این رابطه در مبحث توزیع دوجمله ای توضیح خواهیم داد.

نکته ۲۰ تعداد ترکیب های r تایی از n شیء متمایز که فاقد m شیء به خصوص هستند، از فرمول زیر به دست می آید:

$$\binom{n-m}{r}$$

مثال ۵۰ چند تا از زیر مجموعه های ۵ عضوی مجموعه $A = \{1, 2, \dots, 10\}$ فاقد عضوهای ۶، ۷ و ۸ هستند؟
حل.

$$n = 10, r = 5, m = 3 : \binom{10-3}{5} = \binom{7}{5} = \frac{7!}{5!2!} = 21$$

نکته ۲۱ تعداد ترکیب‌های n تایی از m شیء متمایز که شامل m شیء به‌خصوص هستند، از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$\binom{n-m}{r-m}$$

مثال ۵۱ از بین ۸ دانش‌آموز که ۲ نفر آن‌ها برادر هستند، به چند طریق می‌توان کمیته‌ای ۵ نفری تشکیل داد که شامل هر دو برادر باشند؟
حل.

$$n = 8, r = 5, m = 2 : \binom{8-2}{5-2} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$$

نکته ۲۲ در بسیاری از مسایل ترکیب، اصل ضرب و اصل جمع باهم مورد استفاده قرار می‌گیرد.

مثال ۵۲ به‌چند طریق از بین ۳ دانشجوی اقتصاد، ۵ دانشجوی مدیریت و ۴ دانشجوی حسابداری می‌توان کمیته‌ای ۳ نفره تشکیل داد. به‌طوری که

(۱) ۳ نفر انتخاب شده دارای رشته‌های متمایز باشند.

(۲) از ۳ نفر انتخاب شده ۲ نفر دانشجوی اقتصاد باشند.

حل.

(۱) برای این‌که ۳ نفر انتخاب شده، دارای رشته‌های مختلف باشند باید از هر رشته یک نفر انتخاب کنیم. یعنی یک نفر اقتصاد و یک نفر مدیریت و یک نفر حسابداری؛ پس:

$$\binom{3}{1} \times \binom{5}{1} \times \binom{4}{1} = 3 \times 5 \times 4 = 60$$

(۲) اگر از ۳ نفر انتخاب شده، ۲ نفر دانشجوی اقتصاد باشند، دو حالت پیش می‌آید: (۲) دانشجوی اقتصاد و ۱ دانشجوی مدیریت) یا (۲) دانشجوی اقتصاد و ۱ دانشجوی حسابداری). پس:

$$\binom{3}{2} \binom{5}{1} + \binom{3}{2} \binom{4}{1} = 15 + 12 = 27$$

مثال ۵۳ از بین ۸ پرسش آمار و ۷ پرسش ریاضی، به چند طریق می‌توان به ۱۰ پرسش متشکل از ۶ پرسش آمار و ۴ پرسش ریاضی پاسخ گفت؟
حل.

$$\binom{8}{6} \binom{7}{4} = \frac{8!}{6!2!} \times \frac{7!}{4!3!} = 28 \times 35 = 980$$

نکته ۲۳ (ترکیب‌های با تکرار) فرض کنید k دسته از اشیاء در اختیار داریم. به‌طوری که اشیای هر دسته یکسان و هر دو شیء متعلق به دو دسته‌ی متمایز، غیر یکسان‌اند. هم‌چنین فرض کنید در هر دسته به اندازه‌ی کافی (حداقل n) شیء وجود داشته باشد. در این صورت تعداد راه‌های انتخاب n شیء از این دسته‌ها برابر است با

$$\binom{n+k-1}{n}$$

Combination with repetitions.

Asked 8 years, 6 months ago Active 4 months ago Viewed 77k times

اثبات نکته ۲۳ (مطالعه آزاد)



The formula for computing a k -combination with repetitions from n elements is:

30

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$



I would like if someone can give me a simple basic proof that a beginner can understand easily.



9 Answers

Active Oldest Votes



This problem comes by many names - stars and stripes, balls and urns - it's basically a question of how to distribute n objects (call them "balls") into k categories (call them "urns"). We can think of it as follows.

26



Take n balls and $k - 1$ dividers. If a ball falls between two dividers, it goes into the corresponding urn. If there's nothing between two dividers, then there's nothing in the corresponding urn. Let's look at this with a concrete example.



I want to distribute 5 balls into 3 urns. As before, take 5 balls and 2 dividers. Visually:

|ooo|oo

In this order, we'd have nothing in the first urn, three in the second urn and two balls in the third urn. The question then is how many ways can we arrange these 5 balls and two dividers? Clearly:

$$\frac{(5+3-1)!}{5!(3-1)!} = \binom{7}{2} = \binom{7}{5}.$$

We have that there are $\frac{(n+(k-1))!}{(k-1)!n!}$ the n balls and $k - 1$ dividers (since the balls aren't distinct from each other and the dividers aren't distinct from each other). Notice that this is equal to

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}.$$

مثال ۵۴ فرض کنید به اندازه‌ی کافی سکه‌های ۱۰، ۲۰، ۵۰، ۱۰۰ و ۲۵۰ ریالی در اختیار داشته باشیم. به چند طریق می‌توان گرداده‌ای از ۱۲ سکه تشکیل داد؟
حل.

$$\binom{n+k-1}{n} = \binom{12+5-1}{12} = \binom{16}{12} = \frac{16!}{12!4!} = 1820$$

نکته ۲۴ (قرارگرفتن اشیای متمایز در گروه‌ها) تعداد طریقی که می‌توان مجموعه‌ی n شی‌ای را به k زیرمجموعه با n_1 شی در مجموعه‌ی اول، n_2 شی در مجموعه‌ی دوم، ... و n_k شی در مجموعه‌ی k ام افراز کرد، چنین است:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}, \quad n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$$

برای کسب توانایی در تکنیک این گونه مسائل، ۳ نکته‌ی زیر را در نظر بگیرید:

- (۱) اشیاء متمایزند.
- (۲) گروه‌ها متفاوتند.
- (۳) به‌طور دقیق معلوم است که هر گروه چند عضو می‌پذیرد.

مطالعه آزاد

اثبات این که تعداد روش‌های ترکیب n شی به m گروه و تعداد $k_1, k_2, \dots, k_m$ و $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ و این که $n = k_1 + k_2 + \dots + k_m$ به دست می‌آید.

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! \times k_2! \times \dots \times k_m!}$$

برای سادگی حالت ۳ روشی را در نظر می‌گیریم:

تعداد روش‌های انتخاب k_1 عضو از n عضو:

$$\binom{n}{k_1} = \frac{n!}{(n-k_1)! \times k_1!}$$

پس گروه را از $(n-k_1)$ عضو k_2 عضو انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{n-k_1}{k_2} = \frac{(n-k_1)!}{(n-k_1-k_2)! \times k_2!}$$

تعداد روش انتخاب k_r عضو از $(n-k_1-k_2-\dots-k_{r-1})$ عضو:

$$\binom{n-k_1-k_2-\dots-k_{r-1}}{k_r} = \frac{(n-k_1-k_2-\dots-k_{r-1})!}{(n-k_1-k_2-\dots-k_{r-1}-k_r)! \times k_r!}$$

در نتیجه طبق اصل ضرب تعداد روش‌های ترکیب $k_1, k_2, \dots, k_m$ عضو از n عضو:

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! \times k_2! \times \dots \times k_m!}$$

مثال ۵۵ به چند طریق می‌توان ۸ نفر را در دو اتاق ۳ نفره و یک اتاق ۲ نفره جای داد؟
 حل. در این مسأله، افراد متفاوتند و گروه‌ها هم متفاوتند و همچنین تعداد اعضای هر گروه معلوم است. بنابراین:

$$\binom{8}{3, 3, 2} = \frac{8!}{3!3!2!} = 560$$

مثال ۵۶ به چند طریق می‌توان ۸ نفر را در دو اتاق ۴ نفره جای داد؟

حل. راه حل این مثال مشابه مثال قبل است ولی با یک تفاوت مهم. در این جا هر دو گروه تعداد یکسانی دارند و این مشکل را به همراه خواهد داشت: فرض کنید آن ۸ نفر a, b, c, d, e, f, g, h باشند، یک تقسیم‌بندی به این صورت است که a, b, c, d را به عنوان گروه اول انتخاب کنیم و ۴ نفر باقی‌مانده گروه دوم را تشکیل دهند، اما می‌توان در تقسیم‌بندی دیگری e, f, g, h را به عنوان گروه اول انتخاب کنیم و ۴ نفر باقی‌مانده، گروه دیگر. بدیهی است که این تقسیم‌بندی‌ها یکسان هستند و باید یک بار شمرده شوند با همین استدلال هر تقسیم‌بندی ۲ بار شمرده می‌شود و بنابراین:

$$\frac{1}{2} \binom{8}{4, 4} = \frac{1}{2} \times \frac{8!}{4!4!} = 35$$

مثال ۵۷ به چند طریق می‌توان ۱۰ گوی متفاوت را در ۳ ظرف آبی، زرد، و قرمز قرار داد، به طوری که در یک ظرف ۴ گوی و در دو ظرف دیگر ۳ گوی جای داد؟
 حل. فرق این مثال با مثال‌های قبل این است که مشخص نکرده هر ظرف به طور دقیق چند گوی بگیرد و فقط ذکر کرده که یکی از ظرف‌ها ۴ گوی و دو تای دیگر ۳ گوی. برای حل این مسأله باید ابتدا تعیین کنیم که کدام ظرف ۴ گوی بگیرد، که این کار به $\binom{3}{1}$ طریق ممکن است. حال با انتخاب ظرفی که ۴ گوی در آن قرار می‌گیرد (مثل ظرف آبی) معلوم می‌شود که هر ظرف به طور دقیق چند گوی می‌گیرد (آبی ۴، زرد ۳ و قرمز ۳) و ادامه‌ی مسأله مانند مثال قبل می‌شود.

$$\binom{3}{1} \times \binom{10}{4, 3, 3} = \frac{3!}{1!2!} \times \frac{10!}{4!3!3!} = 12600$$

این نکته بیان دیگری از نکته ۲۳ است.

نکته ۲۵ (قرار گرفتن اشیای یکسان در گروه‌ها) تعداد طرقی که می‌توان n شیء یکسان را در r گروه مختلف قرار داد، برابر است با:

$$\binom{n-1+r}{r-1} = \binom{n-1+r}{n} = \frac{(n-1+r)!}{(r-1)!n!}$$

برای کسب توانایی در تفکیک این گونه مسائل، ۳ نکته‌ی زیر را در نظر بگیرید:

- (۱) اشیاء یکسانند،
- (۲) گروه‌ها متفاوتند،
- (۳) معلوم نیست که هر گروه چند عضو می‌پذیرد و تنها تعداد شیء‌های قرار گرفته در هر گروه برای ما، مهم است.

مثال ۵۸: به چند طریق می‌توان ۱۰ سکه ۵۰۰ ریالی را بین ۴ نفر تقسیم کرد؟
 حل. سکه‌ها یکسانند و افراد با هم متفاوتند (گروه‌های مختلف) و همچنین مشخص نیست که هر فرد چه تعداد سکه دریافت می‌کند، بنابراین:

$$\binom{10-1+4}{4-1} = \binom{13}{3} = \binom{13!}{3!10!} = 286$$

نکته ۲۶: در برخی از مسایل، در نظر گرفتن حالت بندی‌های مناسب ساده‌ترین شیوه در حل مسایل شمارش است. 

مثال ۵۹: با حروف کلمه‌ی «مولاتا» چند رمز عبور ۳ حرفی می‌توان نوشت؟
 حل. کلمه‌ی «مولاتا» دارای ۲ حرف «الف» می‌باشد. بنابراین، حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:
 حالت اول: کلماتی را شمارش می‌کنیم که فاقد حرف «الف» باشد (رمزهای عبور ۳ حرفی را می‌سازیم که در آن از حروف «م، و، ل، ن» استفاده شده است).

$$\boxed{4} \boxed{3} \boxed{2} = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

حالت دوم: کلماتی را شمارش می‌کنیم که شامل یک حرف «الف» باشد (دو حرف دیگر از حروف «م، و، ل، ن» باشد)

$$\begin{array}{c} \text{الف} \\ \boxed{4} \boxed{3} \boxed{1} \end{array} \quad \text{یا} \quad \begin{array}{c} \text{الف} \\ \boxed{4} \boxed{1} \boxed{3} \end{array} \quad \text{یا} \quad \begin{array}{c} \text{الف} \\ \boxed{1} \boxed{4} \boxed{3} \end{array} = 12 + 12 + 12 = 36$$

حالت سوم: کلماتی را شمارش می‌کنیم که شامل دو حرف «الف» باشد (یک حرف دیگر از حروف «م، و، ل، ن» باشد).

$$\begin{array}{c} \text{الف} \quad \text{الف} \\ \boxed{1} \boxed{1} \boxed{4} \end{array} \quad \text{یا} \quad \begin{array}{c} \text{الف} \quad \text{الف} \\ \boxed{4} \boxed{1} \boxed{1} \end{array} \quad \text{یا} \quad \begin{array}{c} \text{الف} \quad \text{الف} \\ \boxed{1} \boxed{4} \boxed{1} \end{array} = 4 + 4 + 4 = 12$$

بنابراین طبق اصل جمع، تعداد رمز عبور ۳ حرفی برابر است با $24 + 36 + 12 = 72$.

مثال ۶۰ از حروف کلمه‌ی «OPERATOR» به چند طریق می‌توان ۴ حرف انتخاب کرد؟

حل. این کلمه شامل دو حرف O و دو حرف R است. بنابراین، حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: کلماتی که حروف تکراری ندارند (۴ حرف انتخابی از حروف T, A, R, E, P, O باشد).

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!2!} = 15$$

حالت دوم: کلماتی که دو حرف تکراری «O» دارند (۲ حرف دیگر از حروف R, E, P, A, T باشد).

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

حالت سوم: کلماتی که دو حرف تکراری «R» دارند (۲ حرف دیگر از حروف O, E, P, A, T باشد).

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

حالت چهارم: کلماتی که دو حرف «O» و دو حرف «R» دارند.

$$\binom{2}{2} \times \binom{2}{2} = \frac{2!}{2!0!} \times \frac{2!}{2!0!} = 1$$

بنابراین، طبق اصل جمع تعداد طریقی که می‌توان ۴ حرف انتخاب کرد، چنین است: $15 + 10 + 10 + 1 = 36$.